ANALIZA MATEMATYCZNA

semestr zimowy 2015

dr Damian Wiśniewski, KAiRR

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

-
-
-
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
-
-
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
-
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
- kolokwium uznajemy za zaliczone, jeśli student zdobędzie z niego minimum 55 % maksymalnej liczby punktów
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
- kolokwium uznajemy za zaliczone, jeśli student zdobędzie z niego minimum 55 % maksymalnej liczby punktów
- z każdego kolokwium jest jedna poprawa (poza zajęciami, wspólna dla wszystkich moich grup)
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
- kolokwium uznajemy za zaliczone, jeśli student zdobędzie z niego minimum 55 % maksymalnej liczby punktów
- z każdego kolokwium jest jedna poprawa (poza zajęciami, wspólna dla wszystkich moich grup)
- wynik poprawy nadpisuje pierwotny rezultat uzyskany z danego kolokwium
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
- kolokwium uznajemy za zaliczone, jeśli student zdobędzie z niego minimum 55 % maksymalnej liczby punktów
- z każdego kolokwium jest jedna poprawa (poza zajęciami, wspólna dla wszystkich moich grup)
- wynik poprawy nadpisuje pierwotny rezultat uzyskany z danego kolokwium
- aby otrzymać minimum 3,0 na koniec trzeba zaliczyć przynajmniej dwa kolokwia
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- można być 5 razy nieobecnym
- trzy kolokwia w semestrze (K1, K2, K3), każde 45 minut (w trakcie zajęć)
- kolokwium uznajemy za zaliczone, jeśli student zdobędzie z niego minimum 55 % maksymalnej liczby punktów
- z każdego kolokwium jest jedna poprawa (poza zajęciami, wspólna dla wszystkich moich grup)
- wynik poprawy nadpisuje pierwotny rezultat uzyskany z danego kolokwium
- aby otrzymać minimum 3,0 na koniec trzeba zaliczyć przynajmniej dwa kolokwia
- dla osób wyróżniających się zaangażowaniem w przedmiot przewiduję podwyższenie pozytywnej oceny końcowej

Fakt nr 1 Materiału jest cholernie dużo jak na 45 godzin.

Fakt nr 1 Materiału jest cholernie dużo jak na 45 godzin.
Fakt nr 2 Prawdopodobnie będę czasami dosyć szybko przemykał przez niektóre zagadnienia (postaram się robić to jak najrzadziej). Proszę wtedy przeanalizować zadania nie przerobione na ćwiczeniach. Jeśli pojawią się wątpliwości - koniecznie szukać u mnie/u dr Ciecierskiej pomocy (np. na konsultacjach).

Fakt nr 1 Materiału jest cholernie dużo jak na 45 godzin.
Fakt nr 2 Prawdopodobnie będę czasami dosyć szybko przemykał przez niektóre zagadnienia (postaram się robić to jak najrzadziej). Proszę wtedy przeanalizować zadania nie przerobione na ćwiczeniach. Jeśli pojawią się wątpliwości - koniecznie szukać u mnie/u dr Ciecierskiej pomocy (np. na konsultacjach).
Fakt nr 3 Będę czynił starania, żeby powiedzieć coś raz, a porządnie, zamiast powtarzać pewne myśli kilkukrotnie (co mi się często zdarza). Osoby, które mają zamiar przeszkadzać w ćwiczeniach (choćby rozmowami między sobą - nie na temat) będą proszone o szybkie opuszczenie sali.

Fakt nr 1 Materiału jest cholernie dużo jak na 45 godzin.
Fakt nr 2 Prawdopodobnie będę czasami dosyć szybko przemykał przez niektóre zagadnienia (postaram się robić to jak najrzadziej). Proszę wtedy przeanalizować zadania nie przerobione na ćwiczeniach. Jeśli pojawią się wątpliwości - koniecznie szukać u mnie/u dr Ciecierskiej pomocy (np. na konsultacjach).
Fakt nr 3 Będę czynił starania, żeby powiedzieć coś raz, a porządnie, zamiast powtarzać pewne myśli kilkukrotnie (co mi się często zdarza). Osoby, które mają zamiar przeszkadzać w ćwiczeniach (choćby rozmowami między sobą - nie na temat) będą proszone o szybkie opuszczenie sali.
Fakt nr 4 W związku z uwagą nr 1 i nr 2 w trakcie zajęć nie będzie żadnych przerw.

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2},\ d_n = \sqrt{n+7}$
2. rekurencyjnie:
   - $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$
   - ciąg Fibbonaciego :

     1 1 2 3 5 8 13 21 ...

     Jak go opisać rekurencyjnie?

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2},\ d_n = \sqrt{n+7}$
2. rekurencyjnie:
   - $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$
   - ciąg Fibbonaciego :

     1 1 2 3 5 8 13 21 ...

     Jak go opisać rekurencyjnie?

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2},\ d_n = \sqrt{n+7}$
2. rekurencyjnie:
   - $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$
   - ciąg Fibbonaciego :

     $$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \dots$$

     Jak go opisać rekurencyjnie?
3. opisowo: (c_n) oznacza n-tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$.

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2},\ d_n = \sqrt{n+7}$
2. rekurencyjnie:
   - $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$
   - ciąg Fibbonaciego :

     $$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \dots$$

     Jak go opisać rekurencyjnie?
3. opisowo: (c_n) oznacza n-tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$.

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu? $((b_n)$-ciąg o wyrazach dodatnich!)

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	**Ciąg**
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
$\geqslant 0$	$\geqslant 1$	niemalejący
$\leqslant 0$	$\leqslant 1$	nierosnący

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	**Ciąg**
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
$\geqslant 0$	$\geqslant 1$	niemalejący
$\leqslant 0$	$\leqslant 1$	nierosnący

((b_n)-ciąg o wyrazach dodatnich!)

Zadanie 1. Zbadać monotoniczność poniższych ciągów :

a) $k_n = n^2 + 3n + 2$, b) $b_n = \frac{3n+5}{5n-4}$,

c) $a_n = \frac{n^2}{7n+4}$, d) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$,

e) $c_n = \frac{n!}{n^n}$, f) $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$,

g) $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$, h) $d_n = \sin \frac{\pi}{2n}$,

i) $c_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$, j) $b_n = \frac{7^n}{n!}$,

k) $f_n = n^{100} - n^{50} + 1$, l) $b_n = 2 \cdot 3^n$

Ciągi ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy ograniczonym, jeśli*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Ciąg, dla którego spełniona jest nierówność $a_n \geqslant m$ nazywamy ograniczonym z dołu, zaś taki, dla którego zachodzi $a_n \leqslant M$ - ograniczonym z góry (ciąg ograniczony z góry i ograniczony z dołu jest ograniczony).

Ciągi ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) *nazywamy ograniczonym, jeśli*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Ciąg, dla którego spełniona jest nierówność $a_n \geqslant m$ nazywamy ograniczonym z dołu, zaś taki, dla którego zachodzi $a_n \leqslant M$ - ograniczonym z góry (ciąg ograniczony z góry i ograniczony z dołu jest ograniczony).

Zadanie 2.

Stwierdzić, czy podane poniżej ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:
a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, b) $b_n = 4 - 3\cos n$, c) $c_n = 2^n$ d) $d_n = 10n - n^2$,
e) $e_n = 3^{-n}$, f) $f_n = \frac{2^n}{n!}$ g) $g_n = \frac{3^n}{3^n+2}$, h) $h_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+2}$.

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in R$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε, odpowiednio dobraną do ε, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε.

Zadanie 3. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granica ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in R$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε, odpowiednio dobraną do ε, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε.

Zadanie 3. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granica ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in R$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε, odpowiednio dobraną do ε, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε.

Zadanie 3. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granica ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).
Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).
Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).
Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).
Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).
Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, *co zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big| \ \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon.$

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Tabelka odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a+\infty=\infty,\ -\infty<a\leqslant\infty$	$a\cdot\infty=\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{\infty}=0,\ -\infty<a<\infty$	$\frac{a}{0^+}=\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{0^+}=-\infty,\ -\infty\leqslant a<0$	$\frac{a}{0^-}=-\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{0^-}=\infty,\ -\infty\leqslant a<0$	
$a^\infty=0,\ 0^+\leqslant a<1$	$a^\infty=\infty, 1<a\leqslant\infty$
$\infty^a=0,\ -\infty\leqslant a<0$	$\infty^a=\infty,\ 0<b\leqslant\infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$

Tabelka odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a+\infty=\infty,\ -\infty<a\leqslant\infty$	$a\cdot\infty=\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{\infty}=0,\ -\infty<a<\infty$	$\frac{a}{0^+}=\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{0^+}=-\infty,\ -\infty\leqslant a<0$	$\frac{a}{0^-}=-\infty,\ 0<a\leqslant\infty$
$\frac{a}{0^-}=\infty,\ -\infty\leqslant a<0$	
$a^\infty=0,\ 0^+\leqslant a<1$	$a^\infty=\infty, 1<a\leqslant\infty$
$\infty^a=0,\ -\infty\leqslant a<0$	$\infty^a=\infty,\ 0<b\leqslant\infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$

Granice niektórych ciągów:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0,$ $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty,\ \alpha > 0$

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,\ |x| < 1$ $\quad e)\ \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty,\ x > 1$ $\quad f)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$

$g)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad h)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0\ \alpha > 0,\ a > 1$ $\quad i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0,\ n > 1$

$j)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ $\quad k)\ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ \ a > 1$ $\quad l)\ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0,\ \ |a| < 1$

$m)\ \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ $\quad n)\ \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$ $\quad o)\ \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$

$p)\ \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ o ile (a_n) to ciąg o wyrazach dodatnich zbieżny do granicy niewłaściwej (∞).

Arytmetyka granic

Dla ciągów (a_n), (b_n) zbieżnych lub rozbieżnych do ∞ lub $-\infty$ mamy :

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n;$

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n;$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \quad$ jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0;$

$d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p, \qquad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$

$f)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$

Zadanie 4. Obliczyć granice poniższych ciągów:

$a_n = \frac{(n+7)^{14}}{(2n-4)^7}$, $b_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\cdots+n}$, $c_n = \frac{2+4+6+\cdots+2n}{(8-3n)(5+7n)}$,

$d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5n-3)(2-7n)}{3+6+9+\cdots+3n}$, $e_n = \frac{5+10+15+\cdots+5n}{n+1}$, $f_n = \frac{\sqrt{4n^2-n+1}}{9-2n}$,

$g_n = \frac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}}$, $h_n = \left(\frac{3n+7}{8n+4} + \frac{3n-4}{6n+5}\right)^2$, $i_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n}$,

$j_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}$, $k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-5}$, $l_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}$, $m_n = \frac{5\cdot 4^{n-2}+3\cdot 2^{n+1}}{2\cdot 4^{n+1}-6\cdot 2^n}$,

$o_n = \left(\frac{2^{2n}+2\cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2}\right)^5$, $p_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}$, $r_n = \frac{7+49+343+\cdot+7^n}{3\cdot 7^n-2}$,

$s_n = (\sqrt{9n^2+7n-1} - \sqrt{9n^2+16n})$, $t_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$, $u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$,

$v_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n^2-n}$.

Zadanie 5. Niech α_n $(n \geqslant 3)$ oznacza miarę kąta wewnętrznego n-kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. *Jeśli*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Zadanie 5. Niech α_n $(n \geqslant 3)$ oznacza miarę kąta wewnętrznego n-kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. *Jeśli*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Zadanie 5. Niech α_n $(n \geqslant 3)$ oznacza miarę kąta wewnętrznego n-kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. *Jeśli*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Zadanie 6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + \pi^n + 7^n}, \ b_n = \frac{5\cos n}{n^2+2}, \ c_n = \frac{\sin^2 n + 2n}{5n-1},$$

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n-1}}, \ e_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n)$. *Jeśli*

$$a_n \leqslant b_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Prawdziwe jest również analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do granicy niewłaściwej $(-\infty)$.

Zadanie 7. Na mocy powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim\limits_{n\to\infty} [4n + (-1)^n \cdot n] = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n-\sin n} = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n^3\sqrt{2}]}{[\sqrt{n^2+1}]} = \infty$.

Definicja

Podciągiem nazywamy ciąg pozostały po skreśleniu pewnej (być może nieskończonej) liczby wyrazów ciągu wyjściowego.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego (do granicy właściwej lub niewłaściwej) jest zbieżny do tej samej granicy.

Powyższe twierdzenie daje wygodną metodę dowodzenia, że dany ciąg nie ma granicy.Wystarczy w tym celu wybrać z niego dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Zadanie 8. Pokazać, wskazując odpowiednie podciągi, że ciągi $a_n = (-1)^n,\ b_n = \cos n\pi,\ c_n = [n + (-1)^n n^2]$ nie mają granic.

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:
- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$, $\quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{n+n}$, $\quad c_n = \frac{n^3}{10^n}$,

$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:
- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$, $\quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{n+n}$, $\quad c_n = \frac{n^3}{10^n}$,

$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:
- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$, $\quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{n+n}$, $\quad c_n = \frac{n^3}{10^n}$,

$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:
- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$, $\quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{n+n}$, $\quad c_n = \frac{n^3}{10^n}$,

$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$

Szeregi liczbowe

Definicja

Szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *definiujemy następująco :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

gdzie $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli istnieje granica właściwa ciągu jego sum cześciowych (S_n). Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, to mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Zadanie. Obliczyć sumy częściowe i następnie zbadać zbieżność szeregów:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Oczywisty, bardzo ważny w praktyce, wniosek jest następujący: Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **jest rozbieżny**.

Uwaga! Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to nie wiemy (bez odpowiednich badań), czy szereg jest zbieżny, czy rozbieżny.

Zadanie. Na mocy warunku koniecznego wyciągnąć wnioski odnośnie rozbieżności (o ile się da) następujących szeregów :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\sin \tfrac{1}{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n.$$

Główne zadanie dotyczące szeregów liczbowych, to badanie ich zbieżności. Często nie potrzebujemy (lub nie jest łatwo) dowiedzieć się ile dokładnie wynosi suma szeregu, zazwyczaj interesuje nas jedynie czy jest ona skończona (liczba), czy też ucieka do $\pm\infty$. W tym celu korzystamy z tak zwanych kryteriów (ro)zbieżności szeregów. Najpierw jednak przytoczymy szeregi, do których będziemy się często odnosić.

Dwa ważne szeregi:

- Szereg harmoniczny rzędu α : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Szereg ten jest zbieżny dla $\alpha > 1$, w przeciwnym wypadku jest rozbieżny.
- Szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$. Wtedy suma takiego szeregu wynosi

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

W przeciwnym wypadku ($|q| \geqslant 1$) jest to szereg rozbieżny.

Kryterium porównawcze

Niech $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Zadanie. Na podstawie kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \cdot 3^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n-1}{8n^4-5n^2+2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt{n}-2}$.

Kryterium d'Alamberta

Niech $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i istnieje granica $g := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0,1) \cup (1,\infty]$.

Wówczas, jeśli $g \in [0,1)$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeśli $g \in (0,\infty]$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{3n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{n^{2n-1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2014} \cdot 2015^n}{2014^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1}n^3+3n}{.}$$

Kryterium Cauchy'ego

Niech $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i istnieje granica $g := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0,1) \cup (1,\infty]$.

Wówczas, jeśli $g \in [0,1)$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeśli $g \in (0,\infty]$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+3}}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

Definicja

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *nazywamy* **bezwzględnie zbieżnym**, *jeśli zbieżny jest szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. *O szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *powiemy, że jest warunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.*

Twierdzenie (o zbieżności szeregów zbieżnych bezwzględnie)

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.*

Zadanie. Zbadać zbieżność bezwzględną szeregów:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \cdot (\frac{n}{n-1})^{n^2}$. Na mocy twierdzenia o zbieżności szeregów zbieżnych bezwzględnie wyciągnąć stosowne wnioski.

kryterium Leibniza

Jeśli ciąg (a_n), $a_n \geqslant 0$ jest ciągiem nierosnącym oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n < \infty$.

Zadanie. Korzystając z kryterium Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów :
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$.

Zadanie. Czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny warunkowo?

kryterium Abela

Jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ oraz (b_n) jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n < \infty$.

Granice funkcji

Definicja (sąsiedztwa)

1. *Sąsiedztwem o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$S(x_0, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}.$$

2. *Sąsiedztwem lewostronnym o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$S(x_0^-, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r, x_0).$$

3. *Sąsiedztwem prawostronnym o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$S(x_0^+, r) \stackrel{df}{=} (x_0, x_0 + r).$$

Definicja (granicy właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0)} \; [(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon)] \, .$$

Definicja (granicy lewostronnej właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^-)$. Liczba g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0^-)} \; [(0 < x_0 - x < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon)] \, .$$

Definicja (granicy prawostronnej właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^+)$. Liczba g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0^+)} \left[(0 < x - x_0 < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon) \right].$$

Zadanie. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (5 - 3x) = -1$; b) $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$;

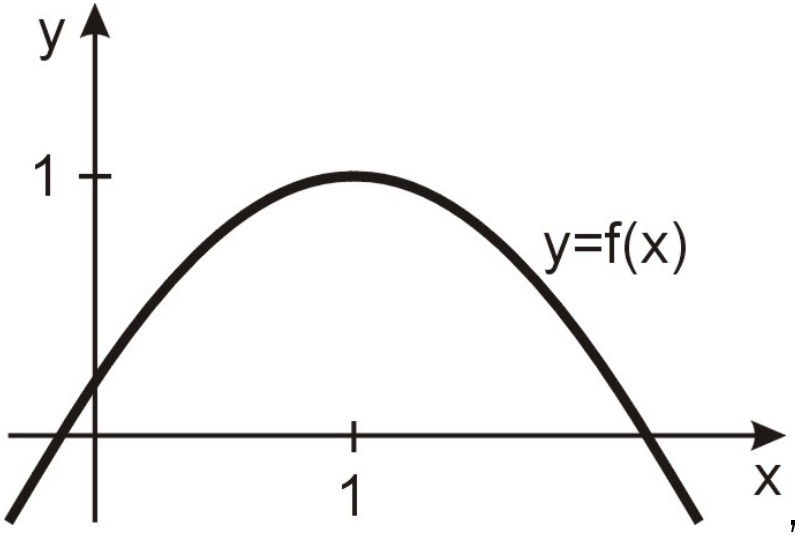
d) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = 0$.

Zadanie. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy jednostronnej w punkcie uzasadnić podane równości:

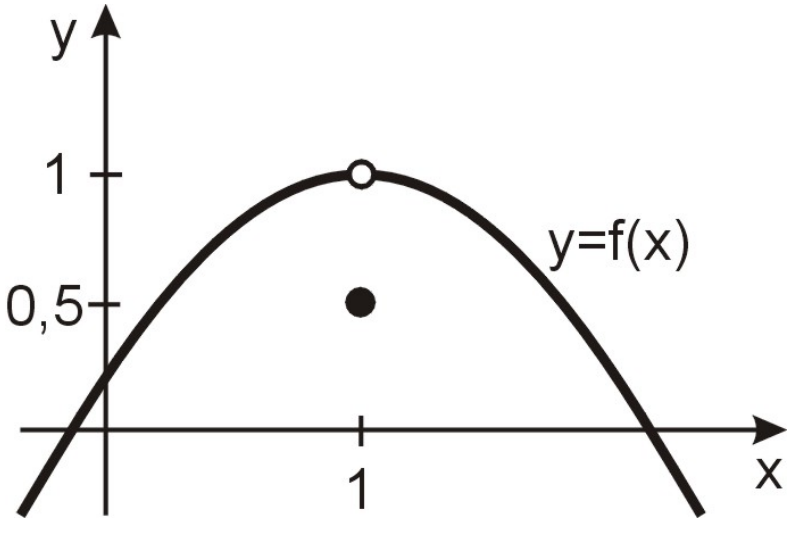
a) $\lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$; b) $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.

Dla funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach, podać granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$ lub uzasadnić, że one nie istnieją:

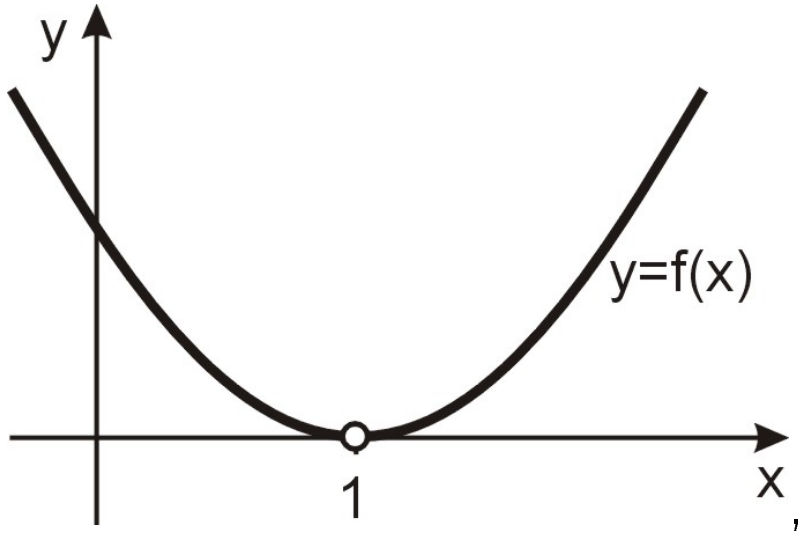
a)



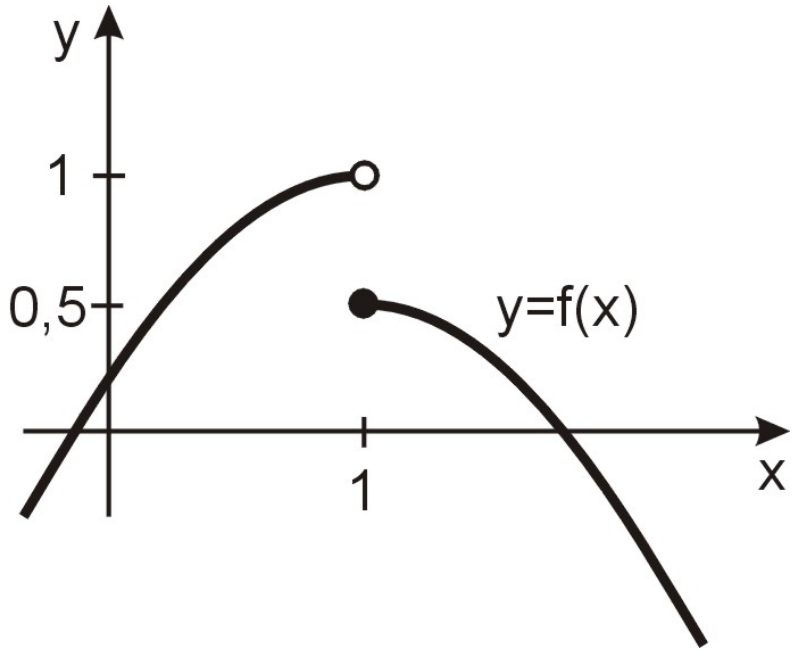
b)



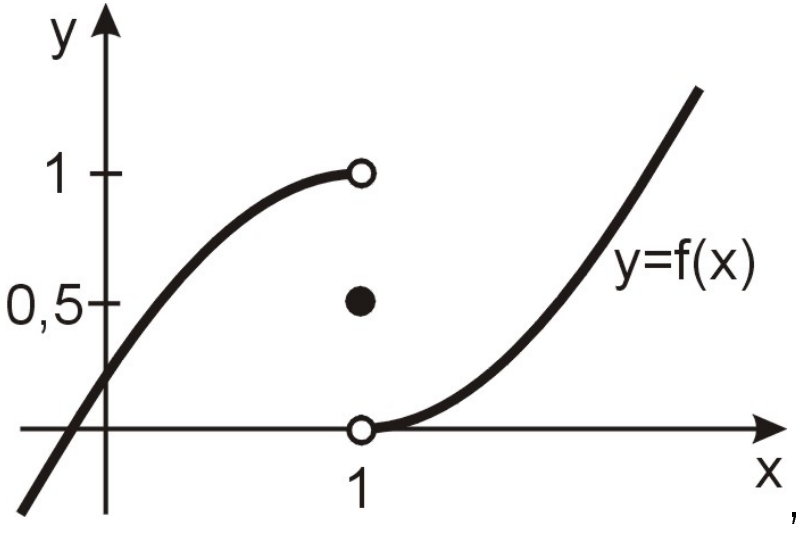
c)



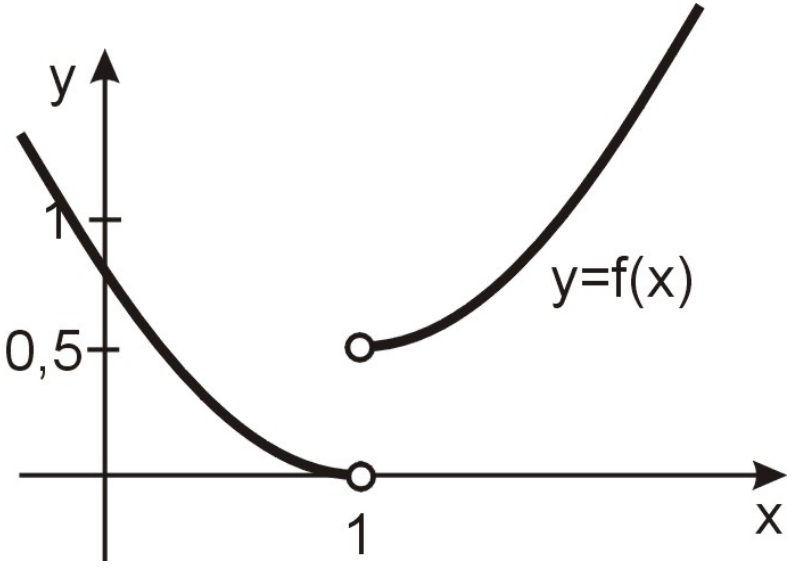
d)



e)



f)



Twierdzenie (warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)

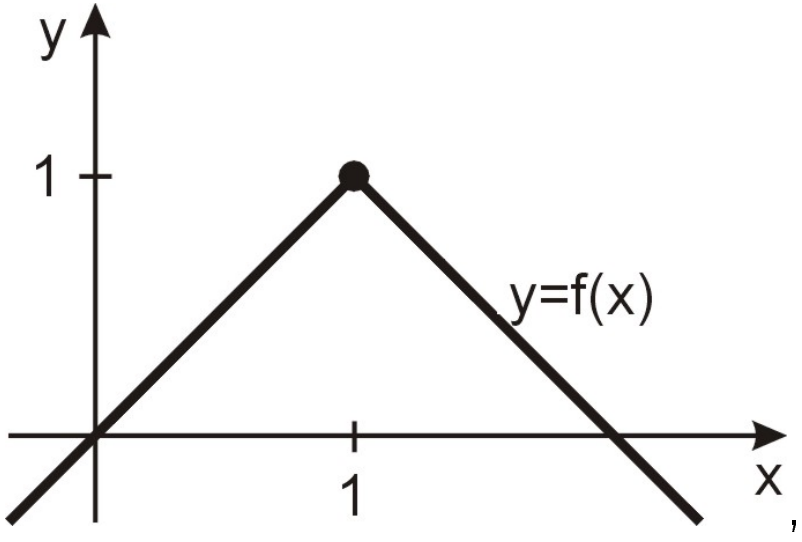
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

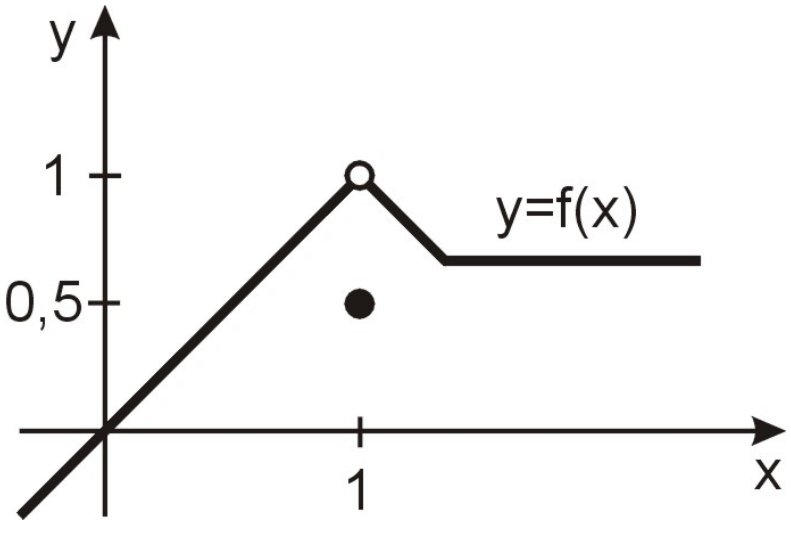
Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Zadanie. Dla funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach, podać granicę w punkcie $x_0 = 1$ lub uzasadnić, że granica ta nie istnieje:

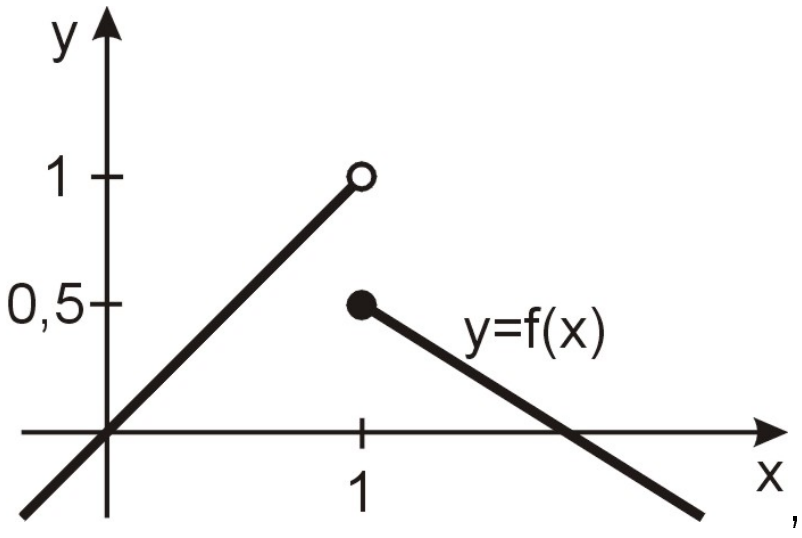
a)



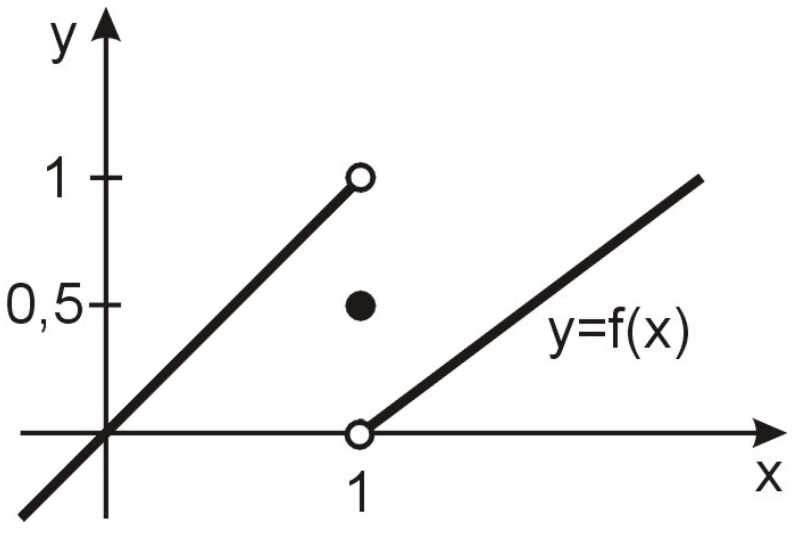
b)



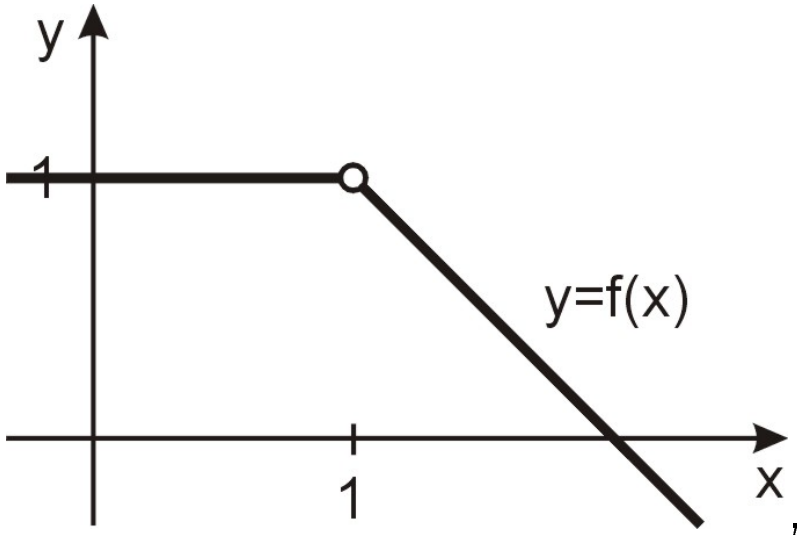
c)



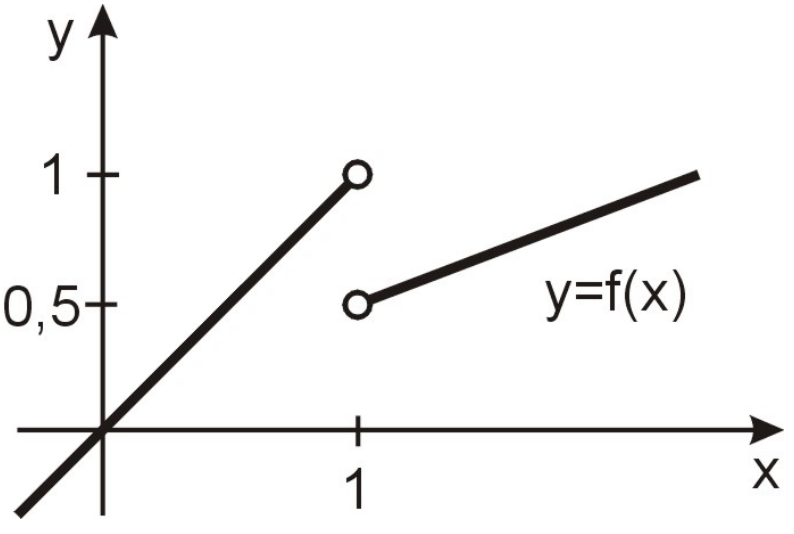
d)



e)



f)



Twierdzenie (o arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $g(x)\neq 0$,
5. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Twierdzenie (o granicach niewłaściwych funkcji)

1. $p+\infty = +\infty$ *dla* $-\infty < p \leqslant +\infty$
2. $p\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$ *dla* $0 < p \leqslant +\infty$
3. $\frac{p}{\pm\infty} = 0$ *dla* $-\infty < p < +\infty$
4. $\frac{p}{0^+} = +\infty$ *dla* $0 < p \leqslant +\infty$
5. $p^{+\infty} = 0$ *dla* $0^+ \leqslant p < 1$
6. $p^{+\infty} = +\infty$ *dla* $1 < p \leqslant +\infty$
7. $(+\infty)^q = 0$ *dla* $-\infty \leqslant q < 0$
8. $(+\infty)^q = +\infty$ *dla* $0 < q \leqslant +\infty$

Zadanie. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sgn} x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} [3\sin x]$;

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to -1} \operatorname{sgn}\left[x(1-x^2)\right]$;

h) $\lim\limits_{x\to 3} [x]$;

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$;

k) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{\operatorname{sgn}(x^3-1)}$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1} + x$;

m) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{(x-3)^2}$.

Zadanie. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^5-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\cdot 5^x-2^x}{3^x-4\cdot 5^x}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$;

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x^2}}$;

k) $\lim\limits_{x\to 10^6} \frac{\sqrt{x}-10^3}{\sqrt[3]{x}-10^2}$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{25^x-9^x}{5^x-3^x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$;

o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

r) $\lim\limits_{x\to \infty} (e^{2x}-e^x)$;

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

t) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

u) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4+5x^3+11x^2+16x+12}{x^3+16x^2+52x+48}$;

w) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^4+5x^3+11x^2+16x+12}{x^3+16x^2+52x+48}$.

Dla granic funkcji istnieją odpowiedniki twierdzeń o trzech i dwóch ciągach:

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Jeżeli funkcje f, g i h spełniają warunki
1. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *dla każdego* $x \in S(x_0)$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$.

Twierdzenie (o dwóch funkcjach)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki
1. $f(x) \leqslant g(x)$ *dla każdego* $x \in S(x_0)$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla granicy niewłaściwej $-\infty$.

Poniżej znajduje się lista podstawowych granic, z których można korzystać przy liczeniu granic funkcji:

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a, \ \textit{gdzie } a > 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \ \textit{gdzie } a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \ \textit{gdzie } a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a, \ \textit{gdzie } a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Uwaga nr 1 Wzory, w których granice wynoszą 1 możemy w naturalny sposób rozszerzyć na granice wyrażeń odwrotnych, np. prawdą jest, że $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Uwaga nr 2 Każdy z powyższych wzorów można (i należy) uogólnić. Przykładowo, skoro $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, to również $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\square}-1}{\square} = 1$, gdzie $\square$ oznacza pewną funkcję zmiennej x taką, że $\lim_{x\to 0} \square = 0$.

Uwaga nr 3 Proszę zauważyć, że zdecydowana większość powyższych wzorów zachodzi dla $x \to 0$. Jeśli $x \to a$, gdzie $a \neq 0$, to nie możemy stosować tych wzorów! Możemy za to spróbować dokonać zamiany zmiennej tak, aby nowa zmienna dążyła do 0.

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-7}\right)^{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 5x$;

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$;

k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$;

l) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$;

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+x)-\ln x}{\sin(\frac{1}{x})}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{tg} x}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x}$;

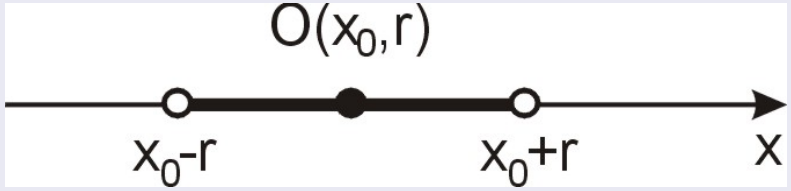
p) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x}$.

Ciągłość funkcji

Definicja (otoczenia punktu)

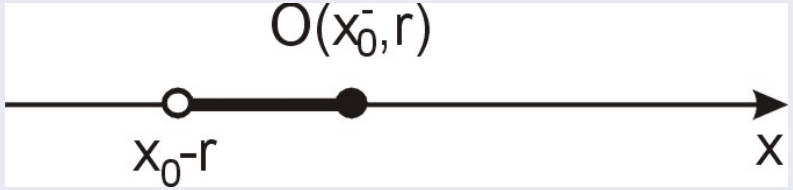
1. *Otoczeniem o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$O(x_0, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r; x_0 + r)$$



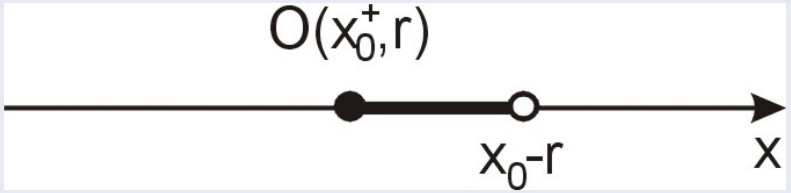
2. *Otoczeniem lewostronnym o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$O(x_0^-, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r; x_0]$$



3. *Otoczeniem prawostronnym o promieniu* $r > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$O(x_0^+, r) \stackrel{df}{=} [x_0; x_0 + r)$$

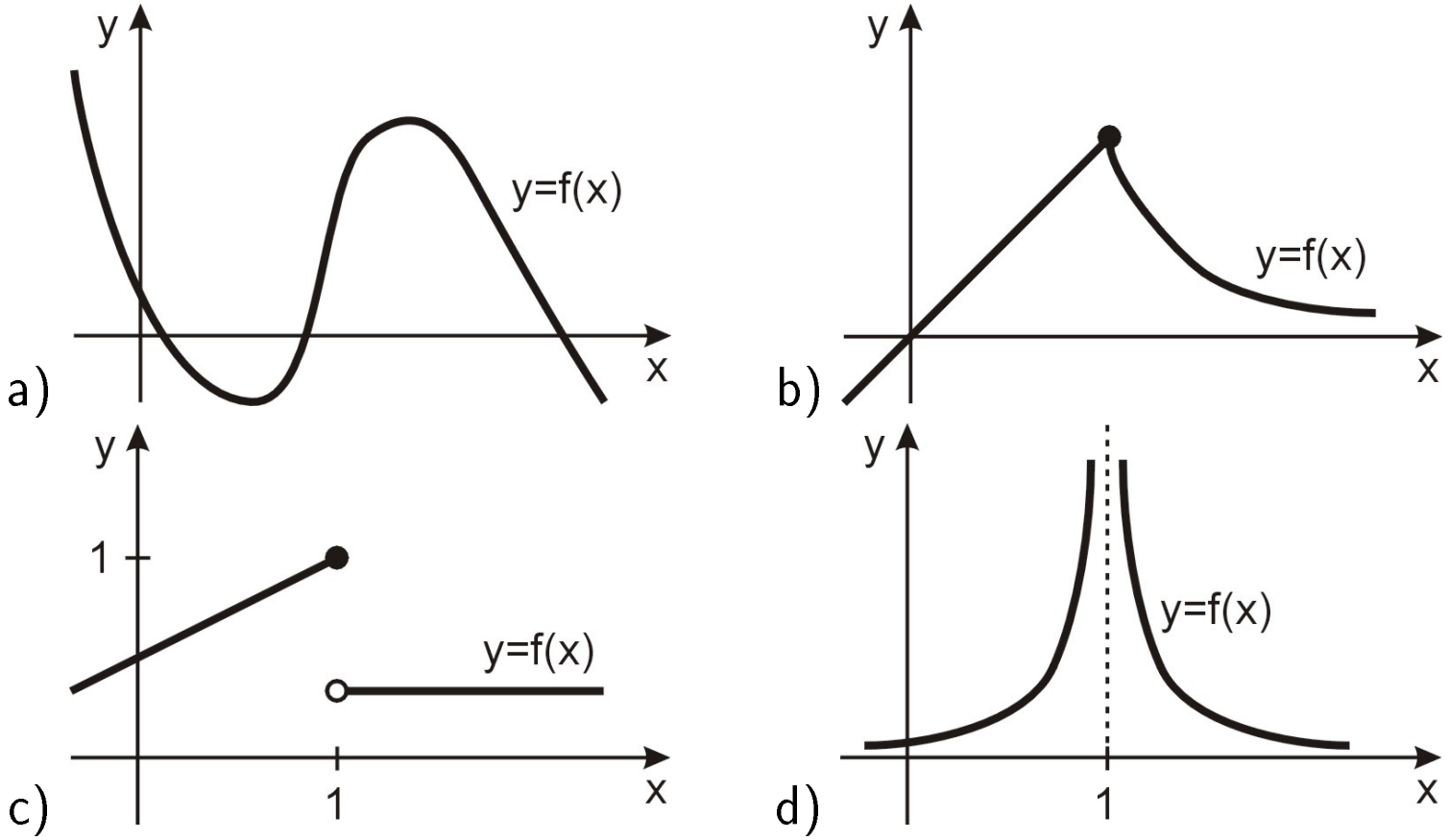


Definicja (funkcja ciągła w punkcie)

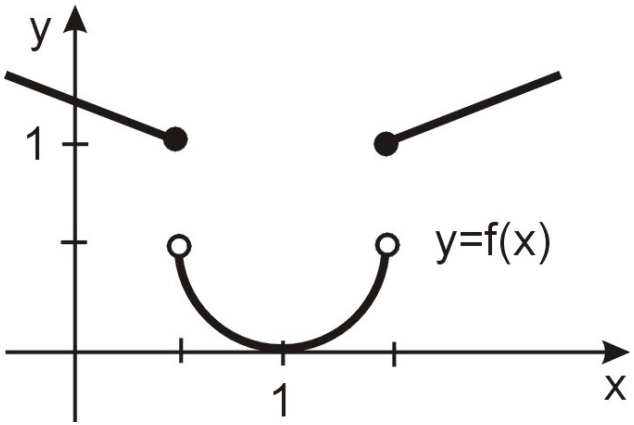
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

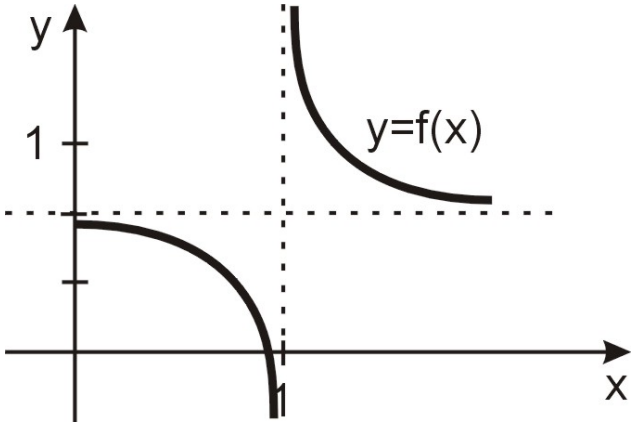
Wskazać punkty, w których funkcje o podanych wykresach nie są ciągłe:



e)



f)



Definicja (funkcja ciągła na przedziale)

Funkcja jest ciągła na przedziale otwartym $(a; b)$*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym* $[a; b]$*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego* $(a; b)$ *oraz prawostronnie ciągła w punkcie* a *i lewostronnie ciągła w punkcie* b*.*

Definicja (nieciągłość funkcji)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ *oraz niech funkcja* f *będzie określona przynajmniej na otoczeniu* $O(x_0)$*. Funkcja* f *jest nieciągła w punkcie* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje granica*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

albo gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Nieciągłość funkcji można rozważać jedynie w punktach należących do jej dziedziny!

Definicja (Rodzaje nieciągłości)

1. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją granice właściwe $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ *lub* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "skok", jeżeli spełnia warunek $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_+} f(x)$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "luka", jeżeli spełnia warunek $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.

2. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, jeżeli nie istnieje lub jest niewłaściwa, co najmniej jedna z granic $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Zbadać ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & dla \quad x < 1, \\ 3 - x & dla \quad x \geqslant 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & dla \quad x < -2, \\ x^2 + 5x + 6 & dla \quad x \geqslant -2, \end{cases} \quad x_0 = -2;$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} & dla \quad x < 0, \\ -2 & dla \quad x = 0, \\ -\frac{\sin 2x}{x} & dla \quad x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{|x-1|} & dla \quad x \neq 1, \\ -2 & dla \quad x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & dla \quad x > 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & dla \quad x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-x-6|}{x+2} & dla \quad x \neq -2, \\ 5 & dla \quad x = -2, \end{cases} \quad x_0 = -2.$

Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & dla \quad x < 0, \\ x + b & dla \quad x \geqslant 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} x & dla \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b & dla \quad |x| > 1, \end{cases} \quad x_1 = -1, \ x_2 = 1;$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & dla \quad |x| \geqslant \frac{\pi}{2}, \\ ax + b & dla \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{\pi}{2};$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 & dla \quad x \leqslant 0, \\ a^x + b & dla \quad 0 < x < 1, \\ 3 & dla \quad x \geqslant 1, \end{cases} \quad x_1 = 0, \ x_2 = 1;$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & dla \quad |x| < 2, \\ a\sqrt{x^2 - 1} & dla \quad |x| \geqslant 2, \end{cases} \quad x_1 = -2, \ x_2 = 2;$

f) $f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x & dla \quad |x| > \frac{\pi}{4}, \\ 1 + \operatorname{tg} x & dla \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad x_1 = -\frac{\pi}{4}, \ x_2 = \frac{\pi}{4};$

g) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & dla \quad x \leqslant 0, \\ ax + b & dla \quad 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & dla \quad x \geqslant 1, \end{cases} \quad x_1 = 0, \ x_2 = 1;$

h) $f(x) = \begin{cases} x & dla \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b & dla \quad |x| > 1, \end{cases} \quad x_1 = -1, \ x_2 = 1.$

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & dla \quad x < 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & dla \quad x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & dla \quad x < 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \\ \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & dla \quad x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & dla \quad x \neq 0, \\ 0 & dla \quad x = 0; \end{cases}$

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & dla \quad x \in (0;1) \cup (1;+\infty), \\ 3 & dla \quad x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} & dla \quad x \neq 0, \\ e & dla \quad x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{x^2} & dla \quad x \neq 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

d) $f(x) = \mathrm{sgn}[x(x-1)], \; x_0 = 1;$

e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} & dla \quad x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & dla \quad x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli
1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli
1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli
1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli
1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Trzy ważne twierdzenia dotyczące funkcji ciągłych

Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ oraz spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $4^x = x^2$, $(-1; 0)$;
b) $e^x = \frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$;
c) $\operatorname{ctg} x = x$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$;
d) $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0; 1)$;
e) $x \sin x = 7$, $\left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$;
f) $3^x + 5^x = 9$, $(1; 2)$;
g) $x^2 + \ln x = 0$, $\left(\frac{1}{e}; 1\right)$;
h) $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;
i) $3^x + x = 3$, $(0; 1)$;
j) $\ln x + 2x = 1$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$;
k) $x^{100} + x - 1 = 0$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$;
l) $x2^x = 1$, $(0; 1)$.

Twierdzenie (Darboux o wartości pośredniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ oraz
1. $f(a) < f(b)$,
2. $p \in (f(a); f(b))$,
to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$ dla którego $f(c) = p$.

Uzasadnić, że:

a) funkcja $f(x) = e^{\sin x}$ przyjmuje w przedziale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ wartość 2;

b) funkcja $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x) - 1$ przyjmuje w przedziale $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ wartość -1.

Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności i osiąganiu kresów)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a; b]$, to
1. jest ograniczona, tzn. istnieją stałe m i M takie, że

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ dla wszystkich } x \in [a; b];$$

2. osiąga swoje kresy, tzn. istnieją punkty $c, d \in [a, b]$ takie, że

$$f(c) = \inf_{x \in [a;b]} f(x) \text{ oraz } f(d) = \sup_{x \in [a;b]} f(x).$$

Uzasadnić, że:

- wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu R jest ten, który ma największe pole;
- wśród walców wpisanych w stożek o promieniu podstawy R i wysokości H istnieje ten który ma największą objętość;

Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności i osiąganiu kresów)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a; b]$, to
1. jest ograniczona, tzn. istnieją stałe m i M takie, że

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ dla wszystkich } x \in [a; b];$$

2. osiąga swoje kresy, tzn. istnieją punkty $c, d \in [a, b]$ takie, że

$$f(c) = \inf_{x \in [a;b]} f(x) \text{ oraz } f(d) = \sup_{x \in [a;b]} f(x).$$

Uzasadnić, że:

- wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu R jest ten, który ma największe pole;
- wśród walców wpisanych w stożek o promieniu podstawy R i wysokości H istnieje ten który ma największą objętość;

Ciągłość kontra ciągłość jednostajna

Definicja (ciągłości Cauchy'ego $\varepsilon - \delta$)

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in O(x_0)}\ \left[(|x-x_0|<\delta)\Longrightarrow(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)\right].$$

Inaczej mówiąc: funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, gdy małe zmiany argumentu x względem tego punktu powodują małe zmiany wartości funkcji $f(x)$ względem $f(x_0)$.

Korzystając z powyższej definicji, uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x - 3$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$.

Rozwiązanie przykładowych zadań egzaminacyjnych odnośnie granic i szeregów

W kolejnych slajdach przedstawię rozwiązania przykładowych zadań egzaminacyjnych z granic i szeregów, które otrzymaliście ode mnie, przez Agatę Dotkę (zadania pod szkicem wykładu z szeregów, strony 11-12 (tak właśnie wyglądają zadania egzaminacyjne u Grażyny Ciecierskiej)). Czasami podaję różne sposoby rozwiązania przykładów. Chcę w ten sposób pokazać Wam, że nieraz istnieją fajne metody/sztuczki, dzięki którym pewne rzeczy policzycie bardzo łatwo. Do dzieła !

CZĘŚĆ PIERWSZA - GRANICE

1) Tak.
Sposób lajtowy. W każdym przykładzie tego typu wystarczy wybrać większą z liczb, które pojawiają się pod pierwiastkiem. Do wyboru mamy 3 i π, więc rozwiązanie to π.
Sposób formalny. Z twierdzenia o trzech ciągach mamy, że

$$\pi = \sqrt[n]{\pi^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n + \pi^n} \leqslant \sqrt[n]{\pi^n + \pi^n} = \sqrt[n]{2\pi^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \pi \to \pi.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + \pi^n} = \pi$.

19) Tak. Patrz uzasadnienie powyżej.

2) Nie.
Sposób lajtowy. Policzmy kilka wyrazów tego ciągu :
$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = 2,\ \ldots$ Wyrazy ciągu skaczą (wracają w to samo miejsce): na zmianę są na wysokości 0 i 2. Taki ciąg **nie ma granicy**.
Sposób formalny. Z twierdzenia o podciągach mamy :

$$a_{2k} = 1 + (-1)^{2k} = 1 + 1 = 2, \quad a_{2k+1} = 1 + (-1)^{2k+1} = 0.$$

Granice podciągów są różne, zatem nasz ciąg nie ma granicy.

16) Tak.
Sposób lajtowy. Jak powyżej :
$a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -6,\ a_4 = 0,\ a_5 = -10,\ a_6 = 0,\ \ldots.$ Ciąg co jakiś czas wraca do wartości 0, więc nie ma granicy.
Sposób formalny. Z twierdzenia o podciągach mamy :

$$a_{2k} = 2k \cdot ((-1)^{2k} - 1) = 2k \cdot 0 = 0,$$
$$a_{2k+1} = (2k+1) \cdot ((-1)^{2k+1} - 1) = (2k+1) \cdot (-2) = -4k - 2.$$

Granice podciągów są różne ($-4k - 2 \neq 0$), zatem nasz ciąg nie ma granicy.

18) Nie.

Sposób lajtowy. Liczymy kilka początkowych wyrazów ciągu :
$a_1 = -2,\ a_2 = 4,\ a_3 = -8,\ a_4 = 16,\ \ldots$ Co ten ciąg robi? Skacze. I to jak! Raz jest na plusie, raz na minusie, coraz bardziej oddalając się od osi OX. Ten ciąg sam nie wie, do czego zmierza (czy w końcu do $+\infty$, czy do $-\infty$). O takich niezdecydowanych ciągach możemy co najwyżej powiedzieć, że są rozbieżne = nie mają granicy (nawet niewłaściwej).

Sposób formalny. Można różnie:

- z podciągów - $a_{2k} = (-2)^{2k} = 4^k$,
  $a_{2k+1} = (-2)^{2k+1} = (-2)^{2k} \cdot (-2)^1 = -4^k$ - widać, że to są liczby różnych znaków
- z definicji Cauchy'ego granicy niewłaściwej $+\infty$:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N \ \Big|\ \forall n > n_\varepsilon\ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε). Jak weźmiemy dowolnie dużą liczbę ε, to oczywiście znajdziemy w końcu wyraz ciągu $> \varepsilon$, ale już następny będzie ujemny, co zaprzeczy tej definicji.

20) Nie.

Sposób lajtowy. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi) = \cos(\infty)$, a granica funkcji cosinus w nieskończoności nie istnieje, a coś, czego granica nie istnieje $+3$ ($\cdot 5$, $: (-2)$, ...) nadal nie posiada granicy.

Uwaga!

$$\lim_{n\to\infty} (\text{coś, co dąży do } 0) \cdot \cos(\infty) = 0.$$

Na przykład : $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot \cos(n\pi) = 0$.

Sposób formalny. Z podciągów: $a_{2k} = \cos(2k\pi) + 3 = \cos 0 + 3 = 4$, $a_{2k+1} = \cos(2k\pi + \pi) + 3 = \cos \pi + 3 = 2$. Granice podciągów są różne, więc szukana granica nie istnieje.

3) Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{1-2n}$ jest nieoznaczonością typu 1^{∞}. Zanosi się wtedy na jej liczenie ze wzoru na liczbę e :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e,\ \text{gdzie}\ \lim_{n\to\infty}\square=\pm\infty.$$

Żeby przykład przyjął postać powyższej granicy, należy:

- stworzyć w nawiasie "dużą" jedynkę 1, a następnie zapisać znak jako plus $+$
- podzielić licznik i mianownik powstałego ułamka przez to, co jest w liczniku - dzięki temu dostaniemy 1 w liczniku
- zapisać w potędze nawiasu takie samo wyrażenie, jakie powstało w mianowniku $\square$, podnieść wszystko do potęgi odwrotnej i do potęgi, która była od początku w przykładzie; dalej już będzie łatwo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+3}-\frac{2}{2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+3}{-2}}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+3}{-2}}\right)^{\frac{2n+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2n+3}\cdot(1-2n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2\cdot(1-2n)}{2n+3}}=e^{2}.$$

21) Proszę zrobić ten przykład analogicznie do 3). Powinno wyjść e^{-8}.

4) Tak.
Sposób lajtowy: Granica, z którą mamy się zmierzyć, to granica (przy zmiennej dążącej do nieskończoności) ilorazu wielomianów, które są **równego** (trzeciego) stopnia. Odpowiedzią będzie iloraz współczynników przy najwyższych potęgach licznika i mianownika, czyli $\frac{-4}{2} = -2$.
Sposób formalny: Należy wyłączyć najwyższą potęgę przed nawias zarówno w liczniku jak i mianowniku (wyłączyć lub podzielić, jak kto woli):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{17 - 4n^3 + 5n - 2n^2}{4n^2 + 2n^3 + 3n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{17}{n^3} - 4 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n})}{n^3(\frac{4}{n} + 2 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3})} = \frac{-4}{2},$$

ponieważ n^3 się skrócą, zaś wyrażenia w nawiasach typu $\frac{\text{liczba}}{n^{\text{coś dodatniego}}}$ dążą do 0.

5) **Sposób lajtowy**. Zasłoń w przykładzie wszystkie liczby, które są w potędze n i są mniejsze niż największa z podstaw (czyli piątka). Mamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 5^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5^{n+1}}{5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5^n \cdot 5}{5^n \cdot 5^2} = -\frac{1}{5}.$$

5) **Sposób formalny**. Dzielimy licznik i mianownik przez największą liczbę, którą widzimy w podstawach podniesioną do potęgi n. Mamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 5^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^n - 5}{(\frac{4}{5})^n \cdot 4 + 5^2} = -\frac{1}{5},$$

ponieważ wyrażenia typu $(\text{liczba z przedziału}(0,1))^n$ zbiegają do 0.

6) Tak. Zauważmy po pierwsze, że coś zrobić trzeba, ponieważ jest to wyrażenie nieznaczone typu $(\infty - \infty)$. W tym celu mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie wyrażenia, którego mamy liczyć granicę (tak jakby usuwamy niewymierność z licznika):

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}) \cdot (\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+1-(n^2+2n)}{\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}})} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1.$$

22) Nie.

Korzystamy z jednej z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych, konkretnie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a w zasadzie z prostej konsekwencji z tego wzorku, mianowicie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \text{ o ile } \lim_{x\to 0} \square = 0.$$

W naszym przypadku w liczniku mamy $\sin(8x)$, więc bardzo byśmy byli szczęśliwi, gdyby w mianowniku pojawiło się wyrażenie $8x$. Realizujemy nasze marzenia dopisując $8x$ zarówno w mianowniku jak i w liczniku, o tak :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x \cdot \sin(8x)}{8x \cdot 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x}{7x} = \frac{8}{7}.$$

23) W tym przykładzie mamy do czynienia z nieoznaczonością typu $(\frac{0}{0})$. Na początku postępujemy podobnie jak w przykładzie 6):

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+8}+2x} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(\sqrt{2x^2+8}-2x)}{(\sqrt{2x^2+8}+2x)\cdot(\sqrt{2x^2+8}-2x)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(\sqrt{2x^2+8}-2x)}{2x^2+8-4x^2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(\sqrt{2x^2+8}-2x)}{2(2-x)(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{2x^2+8}-2x}{2(2-x)} = \frac{8}{8} = 1.$$